

愛護される 3 次元多様体

数学基礎教育において 3 次元多様体論が登場することは少ない。また教科書中心の数学講座シリーズにあって、読み物に近い本書は異色の存在であろう。対象読者層も学部生から専門の研究者まで想定されており、各人の興味にしたがって多様な読み方が可能である。新しい数学、現在発展中の理論を臨場感をもって伝える著者の筆は速い。しかしオーソリティーによる説明の要点を熟知した解説には説得力がある。全体は 4 章からなり、「3 次元多様体においては基本図形の組み合わせ構造が内部に入る幾何を規定する」という現象を様々な角度からみる構成になっている。組み合わせ構造とは多様体の多面体分割であったり、円の充填であったり、結び目であったりする。3 次元という「目にみえる」多様体を扱うためにこれらの模様は導入しやすい。

第 1 章では 3 次元多様体を多面体の面の貼り合わせで得られるものとして定義する。これは位相構造より強く、PL 構造より弱い、3 次元では同値であり、しかも本書のテーマにかなった定義になっている。第 2 章では曲面の場合に、円の充填（サークルパッキング）の仕方がそれを実現する双曲構造（トーラスの場合はユークリッド構造／定数倍）を一意に定めるという Andreev-Thurston の定理の証明を与える。一見 3 次元とは関係ないが、実は曲面の射影構造を通して 3 次元双曲構造と関連がある。あるいは、円を 4 面体分割におきかえて 3 次元で同様のことを考えた Casson の実験（最後の節）のための長い導入ともみれる。第 3 章は双曲多様体の基礎概念の説明にあてられる。双曲空間の等長変換群、リー群 $SL(2, \mathbb{C})$ の等質空間、双曲構造の展開写像、基本群のホロノミー表現などの一通りの解説がある。主定理として、双曲多様体の痩せた部分の構造を特定する Margulis 定数の存在定理に正統派の証明を与える。最後の節では 3 次元多様体の幾何学化プログラムの中で双曲構造の占める位置が述べられる。第 4 章が最もホットな部分である。「体積をめぐって」という表題にあるように、位相不変量としての双曲体積を 3 つの話題で論じている。はじめは閉多様体の双曲体積と実数係数の 3 次元ホモロジーから位相的に定義される単体体積が一致するという Gromov の定理であり、明解な証明は一気に読める。次に虚数体積に相当する Chern-Simons 不変量の定義があり、ここは微分幾何的素養が求められるが、不馴れな人向けにも配慮がみられる。最後が結び目の量子不変量に関する最近の進展と、補空間に入る双曲構造の体積が J 不変量のエントロピー極限として現れるであろうとする体積予想についての話である。最近よく聞く話題であるが、それがうまくまとめられていて有用である。

実をいえば私は単体体積にも体積予想にも何か違和感があった。3 次元双曲多様体には Mostow 剛性があり、位相同型（あるいは基本群が同型）なものに入る双曲構造は一意的に決まる。従って体積のように双曲構造から決まる量が位相不変量であるのはこの意味では明らかである。双曲構造を忘れてなぜ位相的な情報から体積を取り出したいのか？本書の

144ページにあるコメントはその疑問に答えている。研究の方向としてそのほうが面白いからである。さらに考えれば、上で述べた本書全体に流れるテーマがその答えなのだ。位相構造が幾何を定める。この単純ではあるが豊かな数学を作り出す原理を3次元の世界で見せてくれるのが本書である。それは双曲多様体を与えられたところから出発している理論とは別のより理念的な魅力があるように感じた。