

函数論的クライン群論が残したもの

この小論では、クライン群の研究において函数論的手法とはどのようなものであったのかを歴史的経緯を含めつつ、その有用性とともにある意味での限界性までも述べたいと思う。昨今のベアス稠密性予想、アールフォルス・マーデン予想、Ending Lamination 予想などクライン群論の中心問題の解決（の報告）により、クライン群論の終焉的気運が高まりつつあるなかにあつて、改めてそれらの問題の起源を解説することも目標にしたい。ただしそれは（個人的事情は別として）クライン群論への farewell を意味するものでは決してないことに注意する。逆説的にいうならば、すでに終わったと思われているところで、反対に新しい問題を生み出しているのが函数論の特質だからである。

1. クライン群の起源から函数論舞台への登場まで

クライン群とはその名称のとおり 19 世紀末にクラインがフリッケとともに一次分数変換（メビウス変換）の部分群の研究をはじめたことに源を発している。これはフックスによる常微分方程式のモノドロミー群の理論の一般化を意図したものである。また同時にケーベやショットキーによるリーマン面の一意化問題と相互に作用していたものと思われる。ここで明らかにされたことは、一次分数変換の離散部分群（クライン群の定義）のリーマン球面への作用は複雑、多様になりえるということである。その様子を視覚化するものとして極限集合が導入された。クライン群 G の極限集合 $\Lambda(G)$ とは、 G の軌道の集積点集合のことである。またここではクライン群の変形の萌芽もみられるが、その変形は生成元を直接いじる言わば代数的変形であった。また、基本領域の考察からクライン群の自由積が再びクライン群になるための条件も与えられた。これらの様子は、最近のマンフォード・シリーズ・ライトによる著書 *Indra's Pearls -- The Vision of Felix Klein* のなかで、きれいなコンピュータグラフィックによって再現されている。

クライン群論の中興は 1960 年以後のアールフォルス、ベアスの研究によってもたらされた。それは有限性定理あるいはその定量化の面積定理として、有限生成クライン群に附随するリーマン面に関する結果として現われる。すなわち、極限集合 $\Lambda(G)$ の補集合を不連続領域 $\Omega(G)$ とすれば、クライン群 G は $\Omega(G)$ に双正則不連続に作用し、その商としてリーマン面が対応する。それがコンパクト面から高々有限個の穴を除いたもの（解析的有限）であるという主張である。函数論的視点からすれば、クライン群の有限生成性からは代数的変形空間の有限次元性が第一義的に現われる。これは 3 次元トポロジ的視点との大きな相違である。タイヒミュラーにはじまる複素構造の変形の理論は、アールフォルス、ベアスによる厳密な定式化を経て、擬等角変形空間の（余）接ベクトルとしての正則 2 次微分形式をみたのであるが、その次元を代数的変形空間の次元で上から押さえることによりリーマン面 $\Omega(G)/G$ の解析的有限性およびそのオイラー数の評価を得たのである。

2. クライン群のタイヒミュラー空間論

1960年のアールフォルスとベアスによる可測リーマン写像定理の証明は、クライン群論において決定的な転機をもたらした。擬等角写像とは、各点の接空間で測る歪曲度（等角性からのずれ）が一様に押さえられた向きを保つ同相写像のことであるが、可測リーマン写像定理は逆に、その歪曲度を任意に与えると擬等角写像が一意的に存在することを主張するものである。与えられたリーマン計量から等温座標を求める操作の一般化とみなすこともできる。この定理により、クライン群 G の擬等角共役により再びクライン群を得るためには、 G -不変な歪曲度を与えるだけでよく、それが擬等角共役全体を記述するパラメーターになりうる。パラメーター空間は G -不変な歪曲度のある同値類全体であり、結局それはリーマン面 $\Omega(G)/G$ のタイヒミュラー空間と一致する。このようにしてクライン群の擬等角変形の理論は、基礎が固まりつつあったタイヒミュラー空間論のひとつの応用として函数論において積極的な研究の対象となっていく。

一方反対に、リーマン面のタイヒミュラー空間をクライン群の変形空間の中に実現し、そのコンパクト化が得られることはベアスにより発見された。リーマン面を一意化するフックス群に対して、そのリーマン面の複素構造の変形に対応するフックス群の擬等角変形は、鏡像のリーマン面の上の複素射影構造の変形に相当する。これによりタイヒミュラー空間を複素射影構造の空間に埋め込むことができる。また、複素射影構造のホロノミー表現としてクライン群が現れるが、それはタイヒミュラー空間の境界では退化群とよばれる群になる。ベアスの稠密性予想とは、複素射影構造の展開写像が単射であるようなホロノミー表現は、必ずタイヒミュラー空間の境界にあるだろうことを述べたものである。

3. 3次元双曲空間の必要性

フリッケ・クラインの当初からの認識のようにクライン群が多様になっていき、また上記の退化群のような「超越的」な方法で構成される群が現われると、その全体を分類したいという流れが自然に起こる。マスキットは原典に立ち返り、クライン群の結合で新しいクライン群を合成する方法を一般化し、逆にクライン群一般を基本パーツに分解するアルゴリズムを得ようとした。アビコフは残留極限集合というものを手掛かりにクライン群の分類を考えた。しかし現代的視点から振り返れば、このような方法には無理があり、その無理とは2次元の枠組みに留まっていることだと言わざるをえない。

実は複素平面上のメビウス変換は3次元上半空間 H への自然な拡張をもち、それが双曲計量に関する等長変換になることはポアンカレにより認識されていた。したがってクライン群 G を3次元完備双曲多様体 H/G の普遍被覆変換群としてみるとらえかたは当初より存在したといえる。しかし、その有用性はやはり1960年代以降のクライン群研究で明

らかになったものである。とくにアールフォルスは初めてクライン群の幾何学的有限性を、双曲多様体の性質としてとらえたといえる。幾何学的有限性とは、 H/G のエンドがすべて無限遠のリーマン面 $\Omega(G)/G$ に面することである。そしてエンドの調和測度の考察から、不連続領域をもつ幾何学的有限なクライン群の極限集合の 2 次元測度が零であることを証明した。さらにこれは有限生成クライン群一般に対しても成立するであろうというアールフォルス予想を呈示した。2 次元測度が零という性質は、極限集合上では擬等角変形の台をもたないことを保証するものであり、クライン群の擬等角変形を考える上では望ましい性質でもある。

一方、たとえば 3 次元閉多様体についてそれが許容する完備双曲構造は一意的かという問題を考えたとき、それは対応するクラインの極限集合上での擬等角変形の可能性に帰着される。3 次元双曲空間 H の群同変な擬等距離写像は、リーマン球面の群同変な擬等角写像に拡張するからである。モストウはこのような擬等角写像は自明なものしか存在しないことをより一般的な設定のもとで示し、剛性定理を得た。クライン群論の文脈のなかでは上述のアールフォルスの定理とあわせて、幾何学的有限なクライン群の擬等角変形は不連続領域上のみで与えられることを結論したものとみなせる。

4. 幾何学的有限なクライン群論の結実

クライン群論を 3 次元双曲多様体の理論とするみかたは、上記の研究ののち 1974 年にマーデンにより明確に呈示された。もちろん函数論からの要請のほかに、3 次元トポロジーの分野においても、スコット核定理を含めて基本定理が整備されたことの影響もあるだろう。ここにおいて幾何学的有限なクライン群 G の変形理論はマーデンの同型定理という形で完成をみる。すなわち G の代数的な微少変形は擬等角変形により得られるという構造安定性を示し、また擬等角変形は 3 次元双曲多様体間の擬等距離写像に拡張することを証明した。3 次元双曲多様体の剛性とリーマン面の柔軟性が幾何学的有限なクライン群においては絶妙に融和し、この範疇に限れば、クライン群の変形理論はタイヒミュラー空間論という函数論の枠組みのなかですべて述べられることがわかったのである。なお、マーデンは幾何学的有限とは限らない有限生成クライン群に対する考察も与えていて、とくに任意の 3 次元双曲多様体はあるコンパクト多様体の内部に同相であろうという予想も述べている。後の 3 次元トポロジーの進展は、アールフォルス予想はこのマーデン予想から従うことを示した。ただこの予想自身はマーデンの功績というよりは自然発生的なものと考えてのがよいと思う。

5. 幾何学化プログラムへの寄与

緩やかに進んでいくはずだったクライン群論に急展開が訪れたのは 1970 年代末のサ

ーストンの登場による。サーストンによる3次元多様体の幾何学化プログラムのなかで双曲幾何学は中心的役割をもち、双曲多様体に対する洞察もそれまでとは異なる斬新なものが現われた。ヨルゲンセンによる円周上のトーラスバンドルに関する原始的な考察がヒントになったともいわれているが、サーストンはそれを極限まで高めるための種々の概念、手法を用意し、ハーケン多様体に双曲構造が入るための条件を完全に決定した。そのなかには当然クライン群についての議論も含まれているが、とくに幾何学的有限なクライン群の極限として退化群を解析する新しい道が開拓された。その基礎としては、タイヒミュラー空間の境界の測度付き測地線層状化空間への実現がある。これはリーマン面上の正則2次微分形式による葉層構造に関するシュトリールベルの理論の双曲幾何的対応物であるとも拡大解釈できる。

ハーケン多様体には一般の場合と特殊な場合に分けて双曲構造が導入されるが、そのうち円周上の曲面バンドルという特殊な場合については、ベアスの退化群の構成法をタイヒミュラー空間の新しいコンパクト化をもちいて両側が退化する場合に拡張する議論が本質的である。一般の場合は、ハーケン多様体の分解とは逆の操作を辿って双曲空間から順次貼り合わせていくのであるが、最後の貼り合わせが可能であることを保証する議論が難しい。この部分は後年マクマレンにより、この操作から定まるタイヒミュラー空間から自身への写像は縮小写像であり、したがってその不動点の存在を示すことであると定式化された。

サーストンの理論は先行する諸結果の影響はあろうが、それにも増して新しい概念を創造し、幾何学的直観に重きをおいて、それを壮大な理論に積み上げていったものである。その正当化はその後何人もの数学者によって様々な角度から試みられた。函数論的にも上記のようにマクマレンを代表として貢献があり、さらにはその仕事に基づく新しい問題も次々に生まれていって活発な研究が行われるようになった。またクライン群に限っても、有名なレクチャーノートには一意化定理で必要になる議論に留まらず、とくに双曲多様体の幾何学的有限ではないエンドの解析について多くのアイデアが与えられている。サーストン以後のクライン群論は、その考え方を踏襲して進められたものといっても過言ではない。マーデンの同型定理は、幾何学的有限エンドについては無限遠の複素構造がエンドの近傍の双曲構造を決定することを主張しているとみなせた。幾何学的無限エンドについてサーストンは、複素構造の退化した方向として1次元的に測地線層状化を与え、それが内部の双曲構造を決定するだろうという Ending Lamination 予想を提出した。

6. 複素力学系への回帰

サーストン以降3次元トポロジー的議論が主流になっていくクライン群論に、もう一度函数論的方法を呼び戻したのはサリバンに負うところが大きい。この分野におけるサリバンの貢献は驚くほど「解析的」である。クライン群の擬等角変形の理論では極限集合上での変形を許容しないことが重要であり、幾何学的有限なクライン群についてはそれが正しい

ことは上で述べた。しかしサーストンの一意化定理の証明を代表として、幾何学的有限ではないクライン群についてもその成立が必要となる場面が増えてきた。アールフォルス予想は未解決のままでこの困難を回避することを可能にしたのがサリバンである。それはモストウの剛性定理の究極の拡張であり、極限集合の任意の測度正の部分集合がクライン群作用に関して再帰性をもつならば、その上で擬等角変形を許容しないことを示したものである。証明はリーマン球面上の集合のメビウス変換での像の大きさを評価する初等解析である。アールフォルス有限性定理の原理と同じく、有限生成クライン群 G の代数的変形空間の次元の有限性を考えれば、 G は上の意味での再帰性をもつことがわかるのである。

サリバンはさらに、極限集合上での群不変測度の存在およびそれに関するエルゴード性とハウスドルフ次元の係りに着目し、これらが収束指数やラプラシアンの特値を通して、対応する双曲多様体の幾何を反映することを示した。双曲面においてパターソンが行った議論を拡張、整備したものである。とくに極限集合のフラクタルとしての複雑さを測る古典的指標であるハウスドルフ次元を、現代的に復活させた功績は大きい。これは函数論的なクライン群論として現在でも活発に研究が進められているの分野のひとつであり、とくにビショップによる一連の仕事はさらに古典的複素解析との関連を深めていっている。

また、クライン群と有理函数の反復合成による複素力学系との類似性に着目し、双方の比較対照から新しい概念や手法を導入していく指導原理を提唱した。有理函数の反復合成はファトゥ、ジュリアの時代よりクライン群との類似性は意識されていたが、サリバンはとくに、擬等角写像を用いたタイヒミュラー空間論を複素力学系に積極的に導入した。たとえば、アールフォルス有限性定理との類似として非遊走領域定理を証明し、また構造安定性と双曲性について双方の力学系における定理と予想を明確にした。このような対応関係はサリバンの辞書ともよばれ、当初は非常に魅力的な研究方法であったと思う。しかし最近ではこの対応は、たとえば英語とラテン語のようなものではないかと感じたりもする。

7. 函数論的視点の意義と限界

辞書に関する上の比喩は誇張だとしても、函数論的クライン群論には、有理函数の反復合成の理論あるいは3次元幾何学と比べてもある大きな特徴がある。それは一言でいえば大域的理論であるということである。函数論的クライン群論からすれば、複素平面上で局所的に正則写像の位相共役類を考えることも、写像の何回かの合成をひとつに繰り込むことも新鮮な驚きに映るのである。あるいは3次元多様体のなかのある軸の近傍で計量を変えたり、錐多様体の錐角度を変形したり、さらには双曲デーン手術ですら実は苦手なのである。クライン群を変形することでしか双曲多様体の変形を考えない理論がどうして成功したのかといえば、それは根源的にはメビウス変換の剛性によるものであり、結果的には無限遠境界の複素構造により内部の双曲構造を決定できたからである。要するに、元来あった函数論的な道具立てでは、幾何学的有限なクライン群の理論までが守備範囲であったとも考えら

れる。ただ大域的理論には特有の透明感があり、それが複素力学系の理論ではひとつの目標として設定され、また双曲多様体の理論では全体の土台として置かれていることも事実である。

最近のクライン群論では、双曲多様体の内部の構造を直接解析する微分幾何的な手法の重要度が増し、その意味で函数論的には苦戦を強いられるようになってきている。しかし、そもそも「函数論的」ということばが無意味であるように、研究対象にあわせて手法は進化し、それに伴い各分野の持ち味が変化していくのは自然な姿である。当面の完成に近づいたクライン群の理論からもう一度フィードバックを受けて、たとえば測度零の極限集合上での変形を、擬等角写像にかわる新しい写像で識別するような理論ができれば、函数論的には興味ある世界がまた広がっていくことになると思う。