

ユナボマーの数学

松崎 克彦 (お茶の水女子大学)

ユナボマーとは、1978年以来全米の大学等を小包爆弾で狙い、多くの研究者を死傷させながら、18年間ものあいだFBIの捜査から逃れてきた犯人につけられたニックネームである。そして彼は殺人をやめる条件として、自分の執筆した声明文の掲載をニューヨークタイムスとワシントンポスト（とペンハウス）に迫り、結局1995年9月、テクノロジーを破壊しなければ人類はその奴隷となってしまうと、現代社会に対し警告を発した論文がワシントンポストに載った。1996年4月、弟の通報をきっかけにテキサスの荒野で隠遁生活をしていた Theodore John Kaczynski は爆弾魔ユナボマーの容疑者として逮捕される。当初の報道により Kaczynski はカリフォルニア州立大学バークレー校（UCB）に在職していた数学者であったことが伝えられたが、筆者はこの手の狂気の人物が数学者と称されるのは（しかも天才という形容がついて）ありがちなことと思ってあまり注意を払わなかった。しかし、ある雑誌の記事で Peter Duren 教授がミシガン大学の院生時代の Kaczynski を回想しているのを目にし、(数学的に) 身近な存在に感じられるようになった（著者は学部4年生のとき、セミナーで Duren の単葉函数の本を勉強したことがあった）。その後、タイム誌編集記者によるユナボマー事件のドキュメンタリー “Mad Genius” の翻訳 [0] をみつけ、彼の数学の研究がどのようなものであったのかに興味をもち、調べてみた。本文章は Kaczynski の数学の業績の紹介を目的とした記事である。

はじめに、Kaczynski の数学者としての経歴を述べておく。1942年シカゴ生まれ。16歳でハーバード大学に入学。1962年卒業。大学院はミシガン大学に進み数学を専攻する。1964年修士号、1967年に博士論文 “Boundary functions”（境界函数）により博士号を取得した。その後1967年秋にUCB数学科助教授として2年契約の職に就き、位相空間論や函数空間論の科目を担当した。しかし1969年、周囲は説得したが Kaczynski は突然UCBを退職し、同時に数学界からも離れた。

Mathematical Reviews に記録されている Kaczynski の論文は全部で 6 編あり、その他レビューアとしての報告がひとつ載っている。論文のうち 5 編 [1] ~ [5] が博士論文のテーマである境界函数についての研究である。残りの [6] はそれとは無関係で、次のような問題が解をもたないことを初等的に証明したノートである：

問題 $n + 1$ を 3 より大きい素数とするとき、

$$k(an^2 + bn + c) = cn^2 + bn + a$$

は $k \geq 2, 1 \leq a \leq n-1, 0 \leq b \leq n-1, 1 \leq c \leq n-1$ をみたす整数解 k, a, b, c をもつか？

境界函数とは、簡単にいえば、ある領域上の函数の境界での極限值により定義される函数のことである。極限值はいろいろな定義の仕方が考えられ、一般には存在しない場合も一意に定まらない場合もある。たとえば複素平面の単位円板 $D = \{z : |z| < 1\}$ から Jordan 領域への等角写像は、境界 $\partial D = \{z : |z| = 1\}$ まで連続に拡張する。また D 上の有界調和函数 f は ∂D のほとんどすべての点で半径方向から近づいたときの極限が存在し、その境界函数 $\varphi(e^{it})$ は可積分であり、もとの $f(re^{i\theta})$ は Poisson 積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it}) \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos(\theta-t))} dt$$

で復元される。これらは函数論の基本的な定理でそこから多くの発展があるが、Kaczynski の研究はそのようなよい性質をもった函数を対象とするのではなく、(連続) 函数一般に対してその境界函数を調べることであった。

いま $f : D \rightarrow Y$ を単位円板 D からある距離空間 Y への函数とする。このとき f に対する曲線収束集合 $C(f)$ とは、 x を端点とする曲線 γ が D 内にあり、それに沿った極限 $\lim_{\gamma \ni z \rightarrow x} f(z)$ が Y 内に存在するような点 $x \in \partial D$ 全体の集合と定義する。また、 $C(f)$ 上定義された函数 $\varphi : C(f) \rightarrow Y$ が f の境界函数であるとは、 $\varphi(x) = \lim_{\gamma \ni z \rightarrow x} f(z)$ がある曲線 γ に対して成り立つときをいう。以下、単に境界函数といえば、 $C(f) = \partial D$ となる f に対するものを意味することにする。与えられた f の境界函数は一意的に定まるとは限らない。曲線 γ の取り方によっては異なる極限が存在するかもしれないからである。このような点を不定点と呼ぶ。Bagemihl の結果によれば任意の函数 f に対してその不定点は高々可算集合である。

Kaczynski の大学院在学中に書かれた最初の論文 [1] では、連続函数 $f: D \rightarrow Y$ の境界函数の Baire の階級に関する問題 (Bagemihl-Piranian) に対して解答が与えられている. ここで、一般に函数 $\varphi: X \rightarrow Y$ (X, Y は距離空間) が連続のとき、 φ を 0 階級の函数と定義し、次に 0 階級の函数の各点収束極限、つまり $\{\varphi_n\}$ を 0 階級函数列として各点 $x \in X$ で $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ と表される φ を 1 階級の函数とする (連続函数の各点収束極限は連続とは限らない). 以下帰納的に $n-1$ 階級の函数の各点収束極限として表される函数を n 階級と定義し、さらに有限階級の函数の極限、またその極限と進んで、可算な順序数を階級としてもつ函数が定義される. これらを総称して Baire 函数という. Baire 函数であることと Borel 可測函数であることは同値である. たとえば Dirichlet の函数

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} (\cos \nu! \pi x)^{2k} \right)$$

は x が有理数ならば 1, 無理数ならば 0 となるが、これはちょうど 2 階級の函数である. Bagemihl-Piranian は $\varphi: \partial D \rightarrow Y$ がある 1 階級の Baire 函数と可算集合を除いた集合上で一致するとき (このとき φ を名誉 2 階級と呼んでいる. 名誉 2 階級は特に 2 階級である.), ある連続函数 $f: D \rightarrow Y$ の境界函数となることを示した.

Kaczynski は $Y = \mathbf{R}$ (実数) の場合に Bagemihl-Piranian の結果の逆、すなわち φ がある連続函数 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ の境界函数ならば φ は名誉 2 階級であることを証明した. さらに、一般に f が α 階級 ($\alpha \geq 1$) の Baire 函数ならば、その境界函数 φ は $\alpha+1$ 階級であること、従って Borel 可測函数の境界函数は Borel 可測であることを示している. 論文 [1] は Bagemihl との連絡のもと掲載され、また Piranian の励ましに対する謝辞も脚注にある.

論文 [2] においては、J. E. McMillan の結果「連続函数 $f: D \rightarrow Y = S^2$ (リーマン球面) の曲線収束集合が $F_{\sigma\delta}$ 集合である」の拡張をおこなっている. ここで集合族 $\mathcal{O}$ に対して、 $\mathcal{O}_\sigma (\mathcal{O}_\delta)$ を $\mathcal{O}$ に属する集合の可算和 (可算交叉) で表される集合の族とする. F は閉集合族を意味し、 $F_{\sigma\delta}$ 集合とは F_σ 集合の可算交叉で表される集合のことである. Kaczynski の定理は、 E を任意のコンパクト距離空間、 $f: D \rightarrow E$ を連続函数、 $\mathcal{F}$ を E の閉部分集合全体のなす集合に Hausdorff 距離をいれた空間、 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{F}$ の任意の閉部分集合とすると、 x を端点とする曲線に沿った f の集積値集合が $\mathcal{C}$ のある要素 (閉集合) に含まれるような点 $x \in \partial D$ 全体は $F_{\sigma\delta}$ 集合であることを主張している.

論文 [3] では調和函数 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ の境界函数を考えている. Bagemihl-Piranian は境界函数が 1 階級の Baire 函数とはならないような調和函数の例を構成したが, Kaczynski はより強く, 有界調和函数についてそのような例をつくった.

論文 [4] は, UCB に就職したのち学位論文を下じきに書かれたもので, 単位円板で定義された複素数値連続函数の境界函数の存在条件に関する最終的な解答を与えている. すでに述べたように連続函数 $f: D \rightarrow Y$ に対する曲線収束集合は ∂D の $F_{\sigma\delta}$ 集合であり, その上で定義される境界函数はやはり名誉 2 階級の Baire 函数であるが, この論文ではこれが複素数値連続函数の境界函数の特質のすべてであることをいっている. すなわち, $Y = S^2$ の場合に, ∂D 上の任意の $F_{\sigma\delta}$ 集合 A と A 上の任意の名誉 2 階級の函数 φ に対して, それを境界函数とする連続函数 $f: D \rightarrow S^2$ の存在を証明した.

最後の論文 [5] は, 投稿の受け付けが 1969 年 4 月 3 日であり, そのとき Kaczynski はすでに UCB を辞職している. 内容は 3 次元の立方体内で定義された連続函数の境界函数についてである. すでに論文 [1] の中でも, 単位円板上の函数の境界函数についての結果は, 次元をあげると成立しないことが注意されているが, ここでは, 3 次元の場合の曲線収束集合が Borel 集合ですらない例を挙げている.

各論文ともたいへん明解な定義, 主張, 証明から構成されていて, 証明は平面上の位相的議論が初等的ではあるが綿々と続いている. このような境界函数の一般論は現在ではあまりみかけない. 一般化が過ぎ, 数学的に豊富な研究対象ではなかったとみることもしらるだろう. しかし, そのような見方を数学者個人に対して向けることは無意味である. それより筆者は, 自分の身のまわりにあった話題を大学院での研究テーマとして選んでいるところに, Kaczynski の普通さ, 素直さのほうを強く感じて安心している. 最後に文献 [0] から彼の論文アドバイザーのコメントを引用をして, この記事をおわる.

「彼の論文について詳しく語っても意味はありません. これは高度で非常に抽象的なものです. 彼の暴力行為や爆弾と, 論文には何の関わりもありません. まったく無関係です。」

参考文献

0. 田村明子訳 “ユナボマー爆弾魔の狂気” (KK ベストセラーズ).

1. T. J. Kaczynski, Boundary functions for functions defined in a disk, J. Math. Mech. 14 (1965), 589-612.
2. —, On a boundary property of continuous functions, Michigan Math. J. 13 (1966), 313-320.
3. —, Boundary functions for bounded harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969), 203-209.
4. —, Boundary functions and sets of curvilinear convergence for continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc. 141 (1969), 107-125.
5. —, The set of curvilinear convergence of a continuous function defined in the interior of a cube, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 323-327.
6. —, Note on a problem of Alan Sutcliffe, Math. Mag. 41 (1968), 84-86.